ISSN 0236-2457
ASTRONOMICHESKII TSIRKULYAR

Published by the Eurasian Astronomical Society
and Sternberg Astronomical Institute

No. 1608, 2014 February 25

К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ В ВОЗМУЩЁННОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ: О ПОСТРОЕНИИ РЯДОВ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ

On the Problem of Motion of a Point Mass in a Perturbed Central Force Field: Constructing the Series in Powers of a Small Parameter

Резюме. При построении методом малого параметра теории движения точечной массы в возмущённом n-мерном центральном поле (необязательно ньютоновом), во многих случаях нелегко построить фундаментальную матрицу линейного приближения и особенно – решить соответствующие неоднородные уравнения. В настоящей работе мы сводим исходную систему неоднородных уравнений в вариациях к n отдельным линейным уравнениям второго порядка. Вследствие этого процесс построения коэффициентов рядов по малому параметру становится проще.

Abstract. Using the method of a small parameter in constructing the theory of motion of a point mass in a perturbed n-dimensional central force field (not necessarily Newtonian), in many cases it is not easy to construct the fundamental matrix for the linear approximation and especially to solve corresponding inhomogeneous equations. In this work, we reduce the original system of inhomogeneous equations in variations to n separate linear equations of the second order. Because of this, the process of constructing the coefficients of the series in powers of the small parameter becomes easier.

Возмущённая и невозмущённая задачи о движении точки в n-мерном центральном поле (необязательно ньютоновом) имеют вид ($x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$):

$$\ddot{x}_j = x_j \varphi(r) + g_j(x,t) \text{ (или } \ddot{x} = x\varphi(r) + g(x,t)); \quad x_j(t_0) = x_{j0}, \text{ (или } x(t_0) = x_0), \tag{1}$$

$$\ddot{x}_j^0 = x_j^0 \varphi(r^0) \text{ (или } \ddot{x}^0 = x^0\varphi(r^0)); \quad \ddot{x}_j^0(t_0) = x_{j0}^0 \text{ (или } \ddot{x}^0(t_0) = x_0^0); \quad j \in [1:n]. \tag{2}$$

Вычитая уравнения (2) из (1), удерживая члены первого порядка по $\delta x = x - x^0$ и используя обозначение $s = x_1^0 \delta x_1 + \cdots + x_n^0 \delta x_n$, получаем в первом приближении [1]:

$$\delta \ddot{x}_j = g_j(x^0, t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k^0}(x_j^0 \varphi(r^0))\delta x_k = g_j(x^0,t) + \varphi(r^0)\delta x_j + x_j^0 \frac{\varphi'(r^0)}{r^0} s, \ \varphi'(r) = \frac{d\varphi}{dr}. \tag{3}$$

Решить уравнения (3) непросто, хотя фундаментальная матрица принципиально может быть найдена по теореме Пуанкаре, но особенно сложен переход к решению неоднородной системы, связанный с интегрированием дробей, в числителях которых стоят определители $(n-1)$-го порядка, а в знаменателе – определитель n-го порядка, причём элементы определителей сложным образом зависят от элементов фундаментальной матрицы и возмущающей функции g. В небесной механике для случая $n = 3$

и центрального поля Ньютона эти сложности преодолеваются специальными приемами [1]. В работе [2] предложена идея, которую в настоящей статье мы реализуем для любого $n \geq 1$ и произвольного центрального поля. Она заключается в том, что сначала выводится линейное уравнение второго порядка относительно s, затем найденное s подставляется в уравнения (3), что даёт вместо этой системы n отдельных линейных уравнений второго порядка относительно δx_j с известными коэффициентами и правыми частями.

Перейдём к выводу уравнения для s. Используя выражения для $\delta\ddot{x}_j$ из (3) и невозмущённые уравнения (2), получаем:

$$\ddot{s} - 2\varphi(r^0)s - 2q - r^0\varphi(r^0)s = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 g_j(x^0,t), \quad q = \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j^0 \delta\dot{x}_j. \tag{4}$$

Дифференцируя q по t и используя формулы (2) и (3), последовательно выводим:

$$\dot{q} = \sum_{j=1}^{n} (\ddot{x}_j^0 \delta\dot{x}_j + \dot{x}_j^0 \delta\ddot{x}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 \varphi(r^0)\delta\dot{x}_j + \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j^0 \left(g_j(x^0,t) + \varphi(r^0)\delta x_j + \frac{x_j^0 \varphi'(r^0)}{r^0} s \right),$$

$$\dot{q} = \varphi(r^0)\dot{s} + \varphi'(r^0)s\dot{r}^0 + \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j^0 g_j(x^0,t). \tag{5}$$

Дифференцируя равенство (4) и используя (5) и простые преобразования, получаем:

$$\dddot{s} - 2\varphi'(r^0)\dot{r}^0 s - 2\varphi(r^0)\dot{s} - 2\dot{q} - s\frac{d}{dt}\big(r^0\varphi'(r^0)\big) - r^0\varphi'(r^0)\dot{s} = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} x_j^0 g_j(x^0,t),$$

$$\begin{aligned} \dddot{s} - \Big(4\varphi(r^0) - r^0\varphi'(r^0)\Big)\dot{s} - \Big(4\varphi'(r^0) + \frac{d}{dt}\big(r^0\varphi'(r^0)\big)\Big)s = \\ = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} x_j^0 g_j(x^0,t) + 2\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j^0 g_j(x^0,t). \end{aligned} \tag{6}$$

Наборы вида $\big(\partial x_1^0/\partial a, \ldots, \partial x_n^0/\partial a\big)$, где a – какой-то параметр, от которого зависят координаты $x_1^0, \ldots, x_n^0$, удовлетворяют однородной системе (3), поэтому из способа вывода следует, что однородному уравнению (6) удовлетворяют функции вида

$$\Psi = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 \frac{\partial x_j^0}{\partial a} = \frac{1}{2}\frac{\partial (r^0)^2}{\partial a}. \tag{7}$$

Интегрируя (6) от t_0 до t и используя (4), получаем:

$$\begin{aligned} &\ddot{s} - \big(4\varphi(r^0) + r^0\varphi'(r^0)\big)s = G(t) = \Pi + \sum_{j=1}^{n}\Big(x_j^0 g_j(x^0,t) + 2\int_{t_0}^{t} \dot{x}_j^0 g_j(x^0,t)dt \Big), \\ &\Pi = \Big[\ddot{s} - \big(4\varphi\ (r^0) + r^0\varphi'(r^0)\big)s + \sum_{j=1}^{n} x_j^0 g_j(x^0,t)\Big]_{t=t_0} = \Big[2\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j^0 \delta\dot{x}_j - 2\varphi(r^0)s\Big]_{t=t_0}. \end{aligned} \tag{8}$$

Если известны три линейно независимые функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 вида (7), то функции вида $\psi = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \alpha_3\psi_3$, где α_1, α_2, α_3 – постоянные, являются решением однородного уравнения (8). Используя это, можно найти фундаментальную систему решений этого уравнения. Затем можно решить и неоднородные уравнения. Подставив теперь s в правые части уравнений (3), можно найти все δx_j.

В трёхмерном случае интерес могут представлять неньютоновы силовые поля (например, поле ядерных сил). В частности, представляет интерес случай $\varphi(r) = cr^{-\alpha}$, $\varphi'(r) = -c\alpha r^{-\alpha-1}$ (при $\alpha = 3$ это соответствует силам Ньютона). Тогда $\varphi'(r) = -c\alpha r^{-\alpha-1}$, а уравнения (2) и (8) принимают вид:

$$\ddot{x}_j^0 = cx_j^0(r^0)^{-\alpha}, \quad \ddot{s} - c(4-\alpha)(r^0)^{-\alpha}s = G(t).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики // М.: Мир, 1964. – 515с.

2. Бабаджанянц Л.К. Аналитические методы вычисления возмущений в прямоугольных координатах планет, 1 // Вестник ЛГУ, 1969. – № 7. – С. 121-132.

Saint-Petersburg State University
35 Universitetskij prosp.
Saint-Petersburg, 198504 Russia

levon@mail.wplus.net

Л.К. Бабаджанянц
L.K. Babadzanjanz
А.М. Брэгман
A.M. Bregman
К.М. Брэгман
K.M. Bregman
П.В. Касикова
P.V. Kasikova

Поступила в редакцию 17 февраля 2014 г.